



Тема: Визначений інтеграл. Його геометричний зміст

Мета:

- *Навчальна:* засвоїти означення площі криволінійної трапеції, навчитися знаходити площу криволінійної трапеції; розглянути означення визначеного інтеграла та навчитися знаходити визначений інтеграл; засвоїти формулу Ньютона-Лейбніца та розглянути геометричний зміст визначеного інтеграла;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння знаходити площу криволінійної трапеції та визначений інтеграл;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук; виховувати звичку охайно оформлювати конспект;

Компетенції:

- математичні (застосовувати нові означення до розв'язування задач)
- комунікативні (спроможність грамотно висловити свою думку)
- інформаційні (спроможність опрацьовувати нові пізнавальні дані)
- загально навчальні (спроможність організовувати власну діяльність під час виконання завдань)

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання;

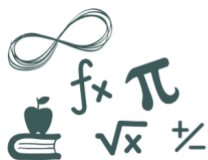
Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

- Що ми називаємо диференціюванням функції?
- Що ми називаємо інтегруванням функції?
- Сформулюйте означення первісної функції
- Сформулюйте основну властивість первісної
- Що ми називаємо невизначеним інтегралом?

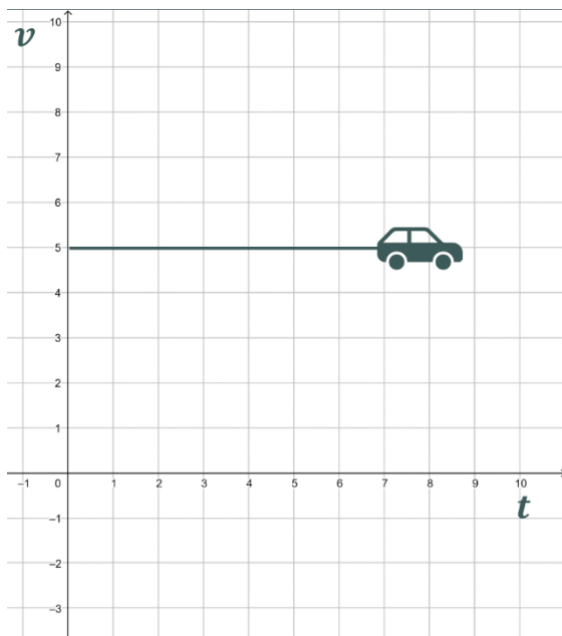


- Пригадаємо таблицю первісних

Функція $f(x)$	Первісна $F(x)$	
a	$ax + C$	a – стала
x^p	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$	$p \neq -1$
$ax + b$	$\frac{ax^2}{2} + bx + C$	
\sqrt{x}	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$	
$\sin x$	$-\cos x + C$	
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\cos x$	$\sin x + C$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

III. Вивчення нового матеріалу

- Криволінійна трапеція

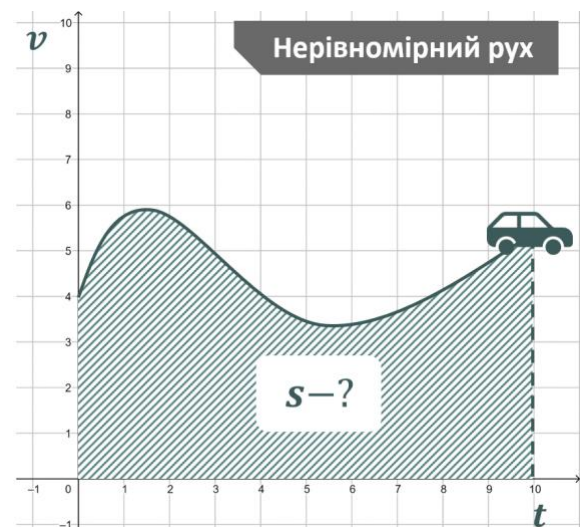
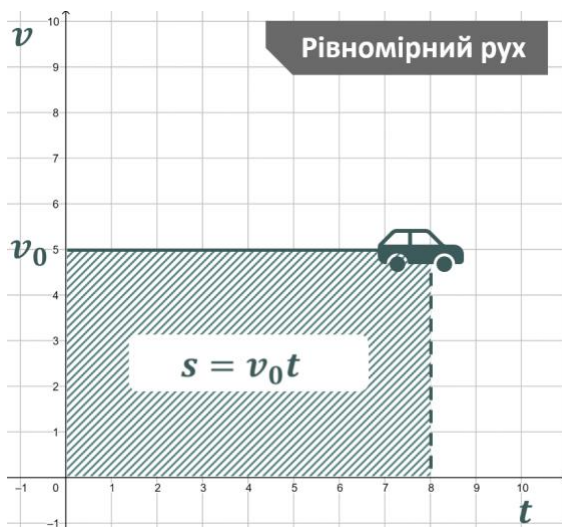
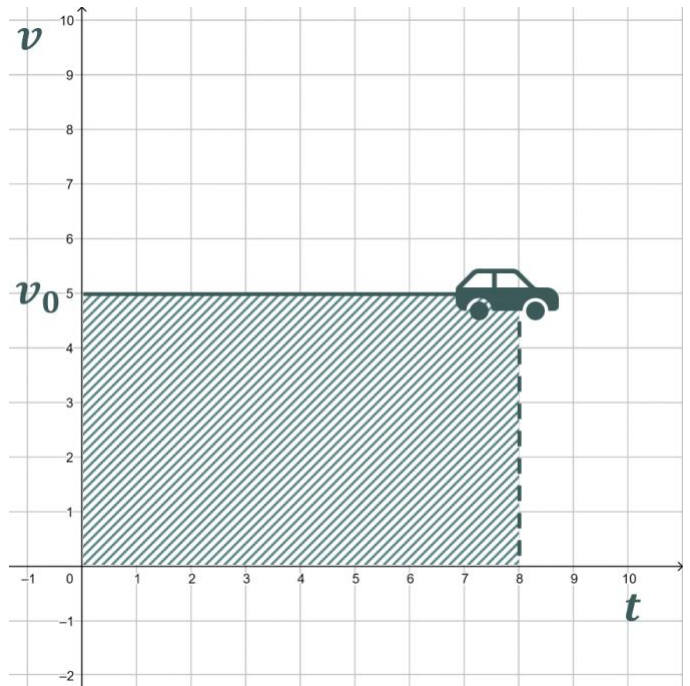


- Як знайти шлях, що подолає автомобіль?

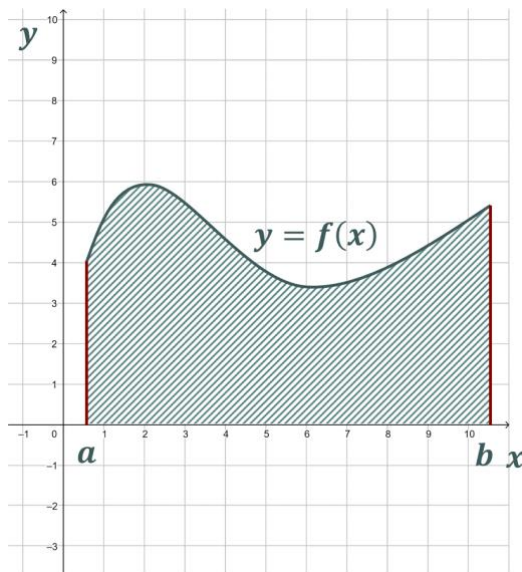
$$(S = v_0 t)$$



- Чи буде цей шлях дорівнювати площі S прямокутника?
(Так)



- *Проблемне питання:*
Чи можемо знайти площу такої фігури?

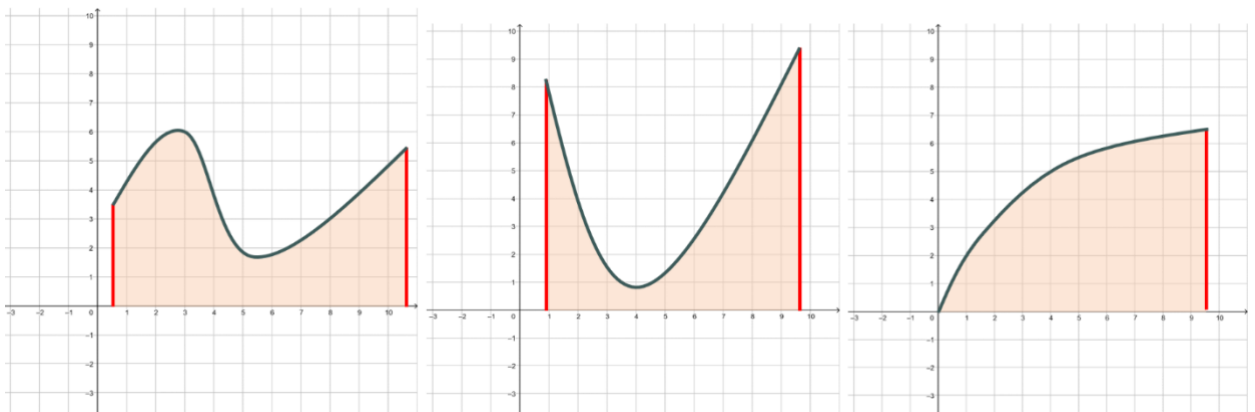


Означення

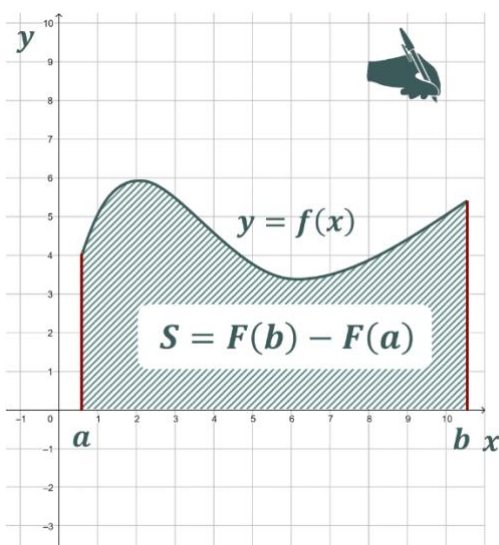
Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$ і $y = f(x) \geq 0$, то фігура, обмежена графіком функції f і прямими $y = 0, x = a$ і $x = b$, називається **криволінійною трапецією**.

*Відрізок $[a; b]$ – це основа криволінійної трапеції.

Приклади криволінійних трапецій:



• Площа криволінійної трапеції



Теорема

Площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ і прямими $y = 0, x = a$ і $x = b$ ($a < b$), можна обчислити за формулою $S = F(b) - F(a)$, де F будь-яка первісна функції f на проміжку $[a; b]$



Наприклад:

Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої відрізками $a = 1$, $b = 3$, віссю Ox і графіком функції $f(x) = 6x - x^2$.

Розв'язок:

- Назвіть одну з первісних ф-ї $f(x) = 6x - x^2$ на проміжку $[1; 3]$

$$F(x) = \frac{6x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

$$F(x) = 3x^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_{a=1}^{b=3} \Rightarrow S = F(3) - F(1)$$

$$S = F(b) - F(a)$$

$$S = F(3) - F(1) = \left(3 \cdot 3^2 - \frac{3^3}{3}\right) - \left(3 \cdot 1^2 - \frac{1^3}{3}\right) = 18 - \frac{8}{3} = \frac{46}{3} = 15\frac{1}{3}$$

• Формула Ньютона-Лейбніца

Означення

Нехай F – первісна функції f на проміжку I , числа a і b ($a < b$), належать проміжку I . Різницю $F(b) - F(a)$ називають **визначеним інтегралом** функції f на проміжку $[a; b]$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Позначення $\int_a^b f(x)dx$ читається як інтеграл від a до b еф від ікс де ікс.

Числа a і b – це межі інтегрування: a – нижня межа, b – верхня межа.

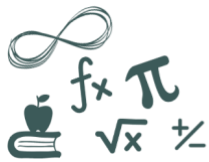
*Отримана рівність називається формулою Ньютона-Лейбніца

• Геометричний зміст визначеного інтеграла

Використовуючи теорему про площу криволінійної трапеції та формулу Ньютона-Лейбніца можна зробити висновок, що площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної і невід'ємної на відрізку $[a; b]$ функції $y = f(x)$, відрізком $[a; b]$ осі Ox і прямими $x = a$ і $x = b$, можна обчислювати за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

- Сформулюйте теорему про площу криволінійної трапеції
 $S = F(b) - F(a)$



- Сформулюйте формулу Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- Який можемо зробити висновок?

$$\left. \begin{aligned} S &= F(b) - F(a) \\ \int_a^b f(x)dx &= F(b) - F(a) \end{aligned} \right| \Rightarrow S = \int_a^b f(x)dx$$

Ця формула виражає геометричний зміст визначеного інтеграла.

• Обчислення визначеного інтеграла

1. Знайти будь-яку первісну F функції f на проміжку $[a; b]$;
2. Обчислити значення первісної F у точках $x = b$ і $x = a$;
3. Знайти різницю $F(b) - F(a)$;

Виконуючи обчислення визначених інтегралів зручно використовувати такий запис:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Наприклад:

Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої відрізками

$a = -\frac{2\pi}{3}$, $b = \frac{\pi}{2}$, віссю Ox і графіком функції $f(x) = \cos \frac{x}{2}$

Розв'язок:

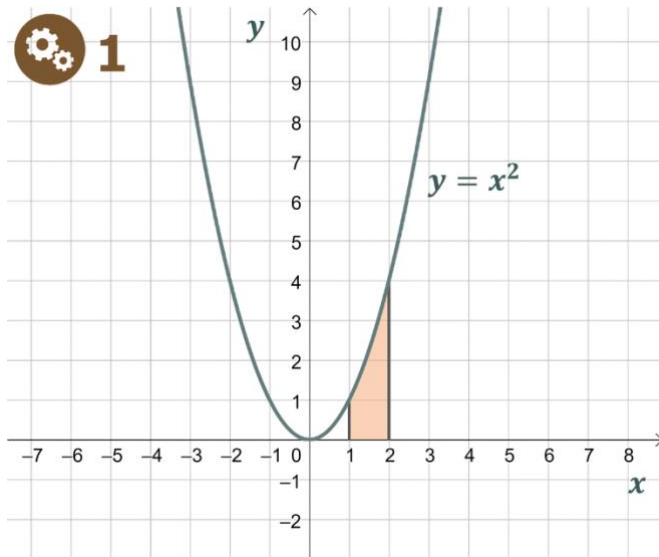
$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2} dx = 2 \sin \frac{x}{2} \Big|_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 \left(\sin \frac{\pi}{4} - \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{3} \end{aligned}$$



IV. Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

Знайдіть площу криволінійної трапеції, зображеної на рисунку:



Маємо криволінійну трапецію, яка обмежена графіком функції $y = x^2$ і прямими $a = 1$ і $b = 2$.

Знайдемо первісну:

$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

За теоремою про площу криволінійної трапеції знайдемо площу:

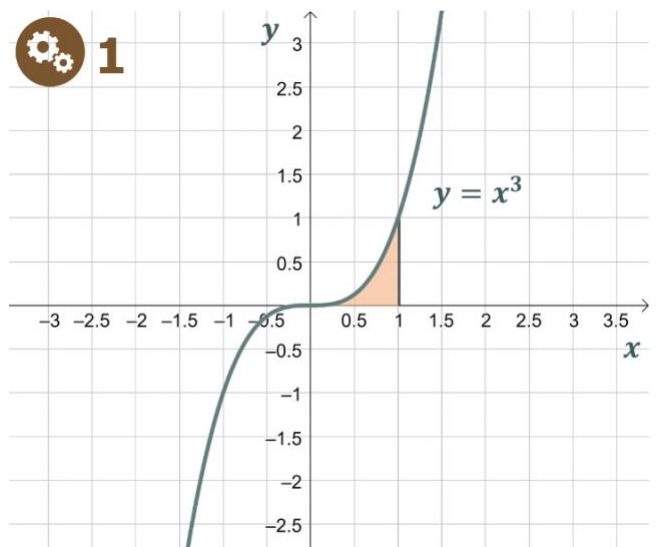
$$S = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \text{ (кв.од)}$$

Маємо криволінійну трапецію, яка обмежена графіком функції $y = x^3$ і прямими $a = 0$ і $b = 1$.

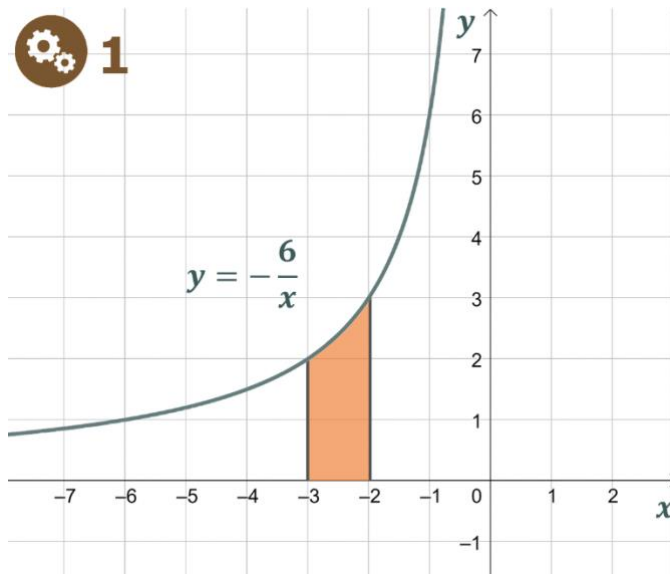
Знайдемо первісну:

$$F(x) = \frac{x^4}{4}$$

За теоремою про площу криволінійної трапеції знайдемо площу:



$$S = F(1) - F(0) = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} \text{ (кв.од)}$$



Маємо криволінійну трапецію,
яка обмежена графіком функції
 $y = -\frac{6}{x}$ і прямими $a = -3$ і
 $b = -2$.

Знайдемо первісну:
 $F(x) = -6 \ln|x|$

За теоремою про площу криволінійної трапеції знайдемо площу:

$$S = F(-2) - F(-3) = -6 \ln|-2| - (-6 \ln|-3|) = -6 \ln 2 + 6 \ln 3 \text{ (кв.од)}$$

№2

Обчисліть визначений інтеграл:

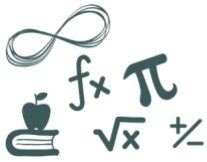
$$\begin{array}{ll} 1) \int_5^7 x dx & 3) \int_{-2}^3 3^x dx \\ 2) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x} & \end{array}$$

Розв'язок:

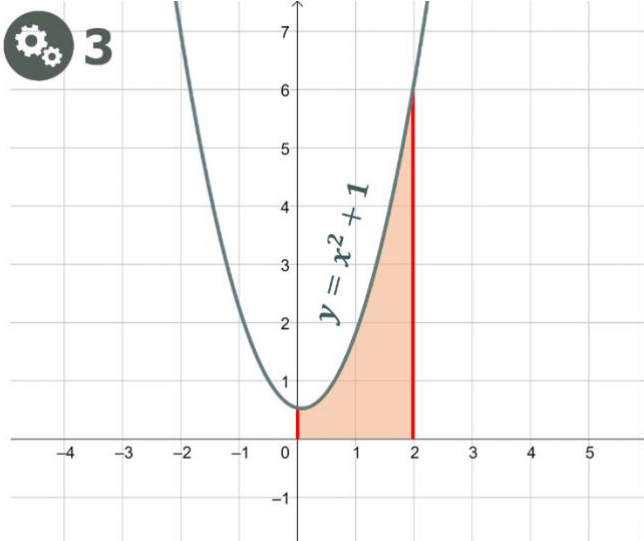
$$1) \int_5^7 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_5^7 = \frac{7^2}{2} - \frac{5^2}{2} = \frac{49}{2} - \frac{25}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

$$2) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \sqrt{3} - 1$$

$$3) \int_{-2}^3 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} \Big|_{-2}^3 = \frac{3^3}{\ln 3} - \frac{3^{-2}}{\ln 3} = \frac{27 - \frac{1}{9}}{\ln 3} = \frac{26\frac{8}{9}}{\ln 3} = \frac{242}{9 \ln 3}$$



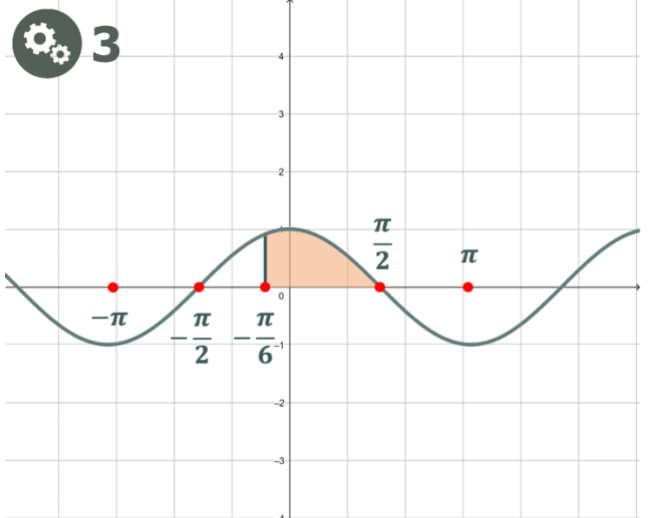
Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої:



- 1) Параболою $y = x^2 + 1$ і
прямими $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$

$$S = \int_0^2 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} + 2 - \frac{0^3}{3} + 0 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3} = 4 \frac{2}{3}$$

Відповідь: $S = 4 \frac{2}{3}$ (кв.од.)

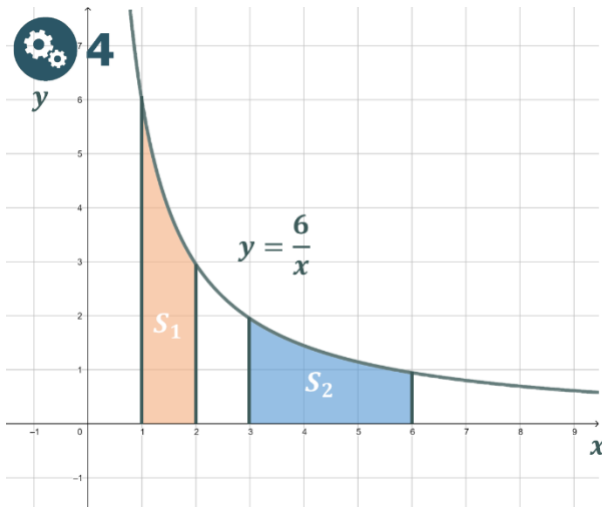


- 2) Косинусоїдою $y = \cos x$ і
прямими

$$y = 0, x = -\frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{2}$$

$$S = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) = 1 + \frac{1}{2} = 1,5$$

Відповідь: $S = 1,5$ (кв.од.)



Доведіть, що криволінійні трапеції, зафарбовані на рисунку рівновеликі.

Доведення:

$$S_1 = \int_1^2 \frac{6}{x} dx = 6 \ln x \Big|_1^2 = 6 \ln 2 - 6 \ln 1 = 6 \ln 2$$

$$S_2 = \int_3^6 \frac{6}{x} dx = 6 \ln x \Big|_3^6 = 6 \ln 6 - 6 \ln 3 = 6(\ln 6 - \ln 3) = 6 \cdot \ln \frac{6}{3} = 6 \ln 2$$

$$\begin{aligned} S_1 &= 6 \ln 2 \\ S_2 &= 6 \ln 2 \end{aligned} \Rightarrow S_1 = S_2$$

Доведено.

№5

Обчисліть визначений інтеграл:

$$1) \int_{-4}^{-2} (2x + 4) dx$$

$$2) \int_1^{\frac{3}{4}} (4x^3 - 4x + 3) dx$$

Розв'язок:

$$\begin{aligned} 1) \int_{-4}^{-2} (2x + 4) dx &= \left(\frac{2x^2}{2} + 4x \right) \Big|_{-4}^{-2} = (x^2 + 4x) \Big|_{-4}^{-2} \\ &= ((-2)^2 + 4 \cdot (-2)) - ((-4)^2 + 4 \cdot (-4)) = 4 - 8 - 16 + 16 \\ &= -4 \end{aligned}$$



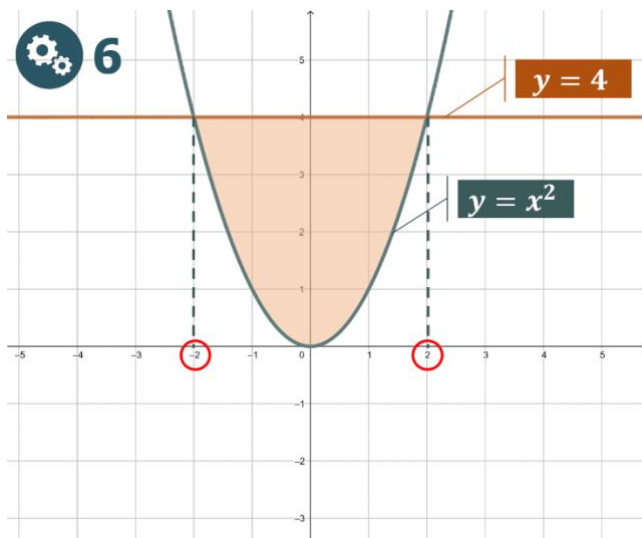
$$\begin{aligned} 2) \int_1^3 (4x^3 - 4x + 3) dx &= \left(\frac{4x^4}{4} - \frac{4x^2}{2} + 3x \right) \Big|_1^3 = (x^4 - 2x^2 + 3x) \Big|_1^3 \\ &= (3^4 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3) - (1^4 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1) \\ &= 81 - 18 + 9 - 1 + 2 - 3 = 70 \end{aligned}$$

№6

Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

- 1) $y = x^2$; $y = 4$
- 2) $y = x^2 + 2$; $y = x + 4$

Розв'язок:

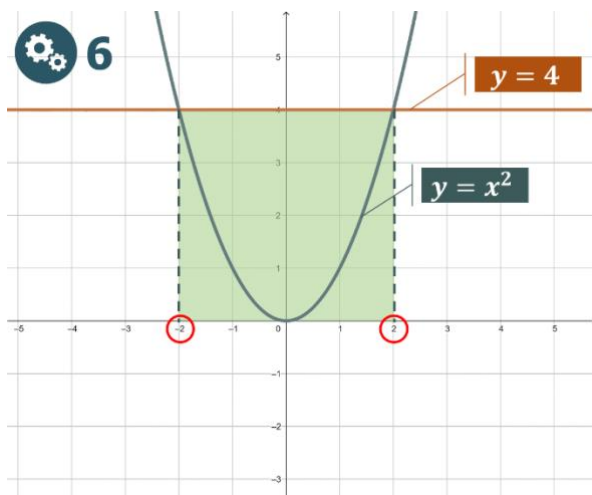


1) $y = x^2$; $y = 4$

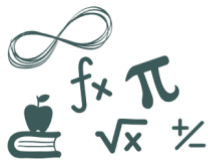
- Яких даних нам не вистачає для знаходження площі фігури?
(Потрібно знайти межі інтегрування)
- Межі інтегрування – це абсциси точок перетину графіків даних функцій.
Отже, якщо $x^2 = 4$, $x = \pm 2$

- Які є ідеї для знаходження цієї площі?
(Учні висловлюють свої ідеї)

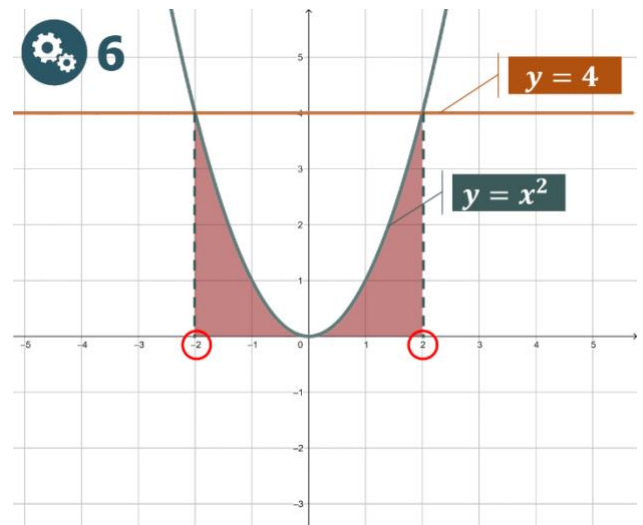
Розв'язок:



Знайдемо площу квадрата утвореного віссю Ox , прямою $y = 4$ та $x = -2$, $x = 2$

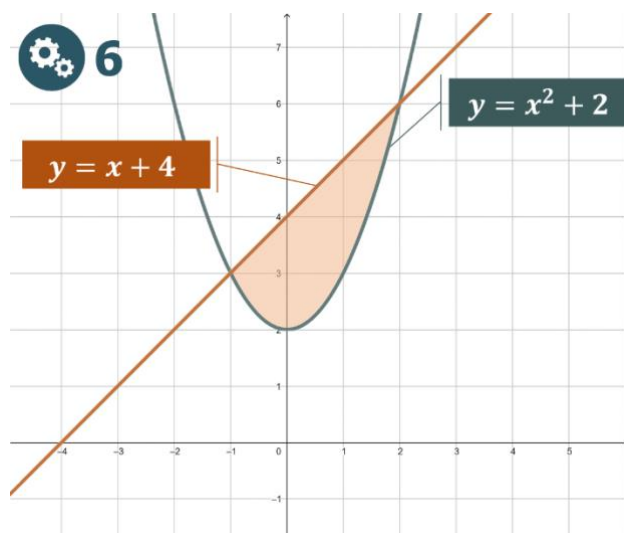


Віднімемо від знайденої площі квадрата площу криволінійної трапеції утвореної графіком $y = x^2$, віссю Ox та прямими $x = -2$, $x = 2$



$$\begin{aligned} S &= 4^2 - \int_{-2}^2 x^2 dx = \left(16 - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_{-2}^2 = 16 - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3}\right) = 16 - \left(\frac{8}{3} + \frac{8}{3}\right) \\ &= 16 - \frac{16}{3} = 16 - 5\frac{1}{3} = 15\frac{3}{3} - 5\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Відповідь: $S = 10\frac{2}{3}$ (кв.од)



2) $y = x^2 + 2$; $y = x + 4$

*Аналогічно до першого прикладу знайдемо межі інтегрування, для цього знайдемо точки перетину графіків $y = x^2 + 2$ і $y = x + 4$.

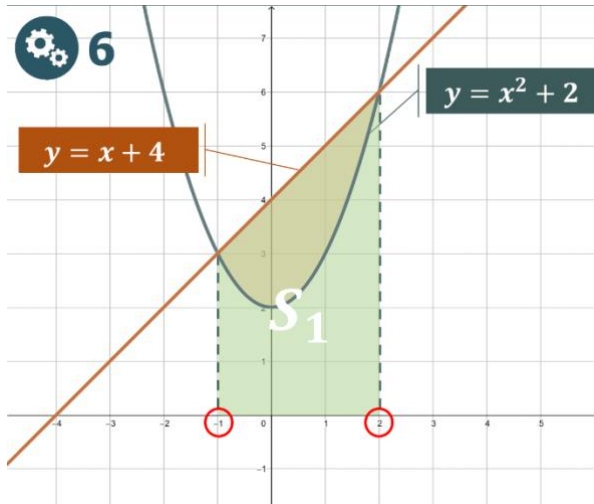
- Як знайти точки перетину двох графіків?
(Процес знаходження точок перетину двох графіків зводиться до рівняння виду $f_1(x) = f_2(x)$)

$$\begin{aligned} x^2 + 2 &= x + 4 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

За теоремою Вієта $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$



- Як можемо знайти площу зафарбованої фігури?
(Площа зафарбованої фігури дорівнює різниці площ криволінійної трапеції, утвореної графіком функції $y = x + 4$, віссю Ox , прямими $x = -1$, $x = 2$ та криволінійної трапеції утвореної графіком функції $y = x^2 + 2$, віссю Ox та прямими $x = -1$, $x = 2$)

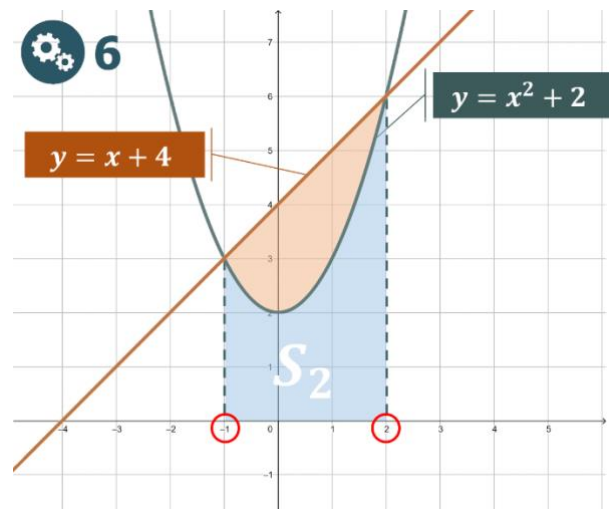


- Як можемо знайти площу S_1 ?

$$S_1 = \int_{-1}^2 (x + 4) dx$$

- Як можемо знайти площу S_2 ?

$$S_2 = \int_{-1}^2 (x^2 + 2) dx$$

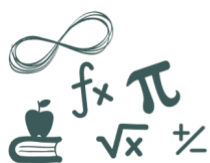


$$S = \int_{-1}^2 (x + 4) dx - \int_{-1}^2 (x^2 + 2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 4x \right) \Big|_{-1}^2 - \left(\frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-1}^2$$

$$S = \left(\left(\frac{2^2}{2} + 4 \cdot 2 \right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 4 \cdot (-1) \right) \right) - \left(\left(\frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2 \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + 2 \cdot (-1) \right) \right)$$

$$S = (10 + 3,5) - \left(\frac{20}{3} + \frac{7}{3} \right) = 13 \frac{5}{10} - 9 = 4,5$$

Відповідь: $S = 4,5$ (кв.од)



V. Підсумок уроку

- Сформулюйте означення криволінійної трапеції
- Як можна обчислити площу криволінійної трапеції?
- Що ми називаємо визначеним інтегралом?
- Як обчислити визначений інтеграл?
- Що ви знаєте про формулу Ньютона-Лейбніца?
- Яка формула виражає геометричний зміст визначеного інтеграла?

VI. Домашнє завдання

Опрацювати §2, п.11 (ст.57-60) Виконати № 11.2 (а,б); 11.4 (1,2); 11.6 (1,2); 11.9 (1,3); 11.11 (1,2)	Мерзляк А.Г.
Опрацювати §10 Виконати № 10.4; 10.6; 10.10; 10.12	Істер О.С.
Опрацювати §7 (88-93) Виконати № 7.1 (1,4,7); 7.2 (1,3); 7.4 (1,2); 7.5 (1,2)	Нелін Є.П.
Опрацювати §6-7 Виконати № 244; 253; 258; 264; 278; 284	Бевз Г.П.